



Che cosa sappiamo su Pitagora e i Pitagorici?

La sua vita, la sua scuola e i suoi risultati filosofico-matematici rimangono ancora oggi in buona parte avvolti dal mistero.

Le principali cause sono:

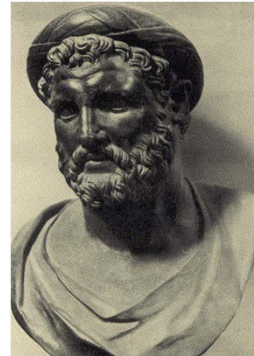
- ❑ La mancanza di fonti primarie
- ❑ La dubbia attendibilità delle fonti secondarie (Diogene Laerzio, Aristotele, Giamblico, Apollonio, Aristosseno, ...) in quanto:
 - Risalenti a momenti storici successivi e differenti tra loro
 - In contrasto l'una con l'altra su vari punti
 - Contenenti affermazioni e particolari storicamente inaccettabili
- ❑ La segretezza e chiusura della scuola pitagorica

Notizie sulla vita di Pitagora

- **Nacque intorno al 572 a.C.** a Samo. Il padre Mnesarco era un commerciante
- Viaggi in **Egitto** e in **Mesopotamia** dove perfezionò la sua formazione scientifico-matematica

“I più dicono che egli apprese le cosiddette scienze matematiche dagli Egizi, dai Caldei e dai Fenici; ché già nei tempi più antichi gli Egizi si dedicarono allo studio della geometria, i Fenici allo studio dell'aritmetica e della logistica, i Caldei all'osservazione degli astri” [Porfirio]

- **Attorno al 520 a.C. raggiunse l'Italia meridionale e si stabilì a Crotona**, dove fondò la sua scuola e prese in mano le redini politiche della città



Busto di Pitagora. Copia romana, della fine del I secolo a.C., di un originale greco



*“Impondeva ai suoi aspiranti **cinque anni di silenzio**, mettendo così alla prova la loro padronanza di sé. ... Se apparivano degni di essere iniziati alle dottrine, **dopo cinque anni di silenzio, diventavano per sempre esoterici**, ascoltavano Pitagora dentro la tenda, e potevano anche vederlo. Prima, fuori della tenda, avevano potuto partecipare alle sue lezioni solamente ascoltando, senza mai vederlo” [Giamblico]*



La setta pitagorica si trasformò in una vera e propria oligarchia isolata dalla popolazione creando tensioni e poi un vero conflitto.

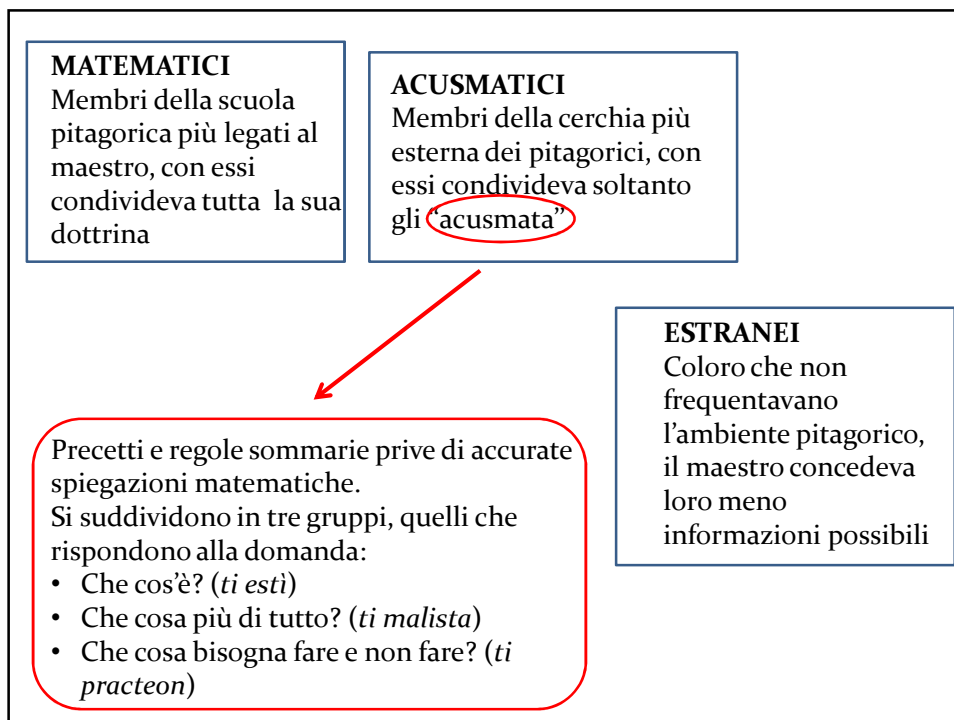
Le ragioni:

- risentimento degli esclusi dalla setta
- carattere chiuso della comunità pitagorica
- potere oligarchico esercitato su tutta la città

L'antipitagorismo portò allo sterminio di alcuni seguaci della setta e all'esilio di altri.

Pitagora si rifugiò a Metaponto dove morì alla fine del VI secolo a.C. circondato da un'aura di sacralità.

"Un giorno a Metaponto Pitagora apparve e disse: «Questa nave vi porterà un morto»... E il medesimo Aristotele scrive di lui molte altre cose, tra le altre questa, che rispondendo con un morso al morso di un serpente mortale, lo uccise... Una volta anche apparve nello stesso giorno e nella stessa ora in Crotona e in Metaponto...» [Apollonio]



La “setta” pitagorica

- Luogo di ritrovo: **Tempio di Hera Lacinia**
- Questioni filosofiche, matematiche e politico-sociali
- Selezione rigorosa ed estenuante periodo di iniziazione
 - **3 anni di isolamento**
 - **5 anni di silenzio**
- Ingresso ufficiale nella scuola che consentiva di ascoltare le lezioni di Pitagora dal vivo (dentro la tenda)
- **Beni materiali messi in comune**
- Rigide regole comportamentali, segretezza, divieto assoluto di divulgazione dei risultati raggiunti (pena: odio degli dei e degli uomini)



Giornata tipo dei Pitagorici [Giamblico]

1. Passeggiata mattutina solitaria all'aria aperta
2. Incontro con gli altri Pitagorici: insegnamento e apprendimento
3. Momento dedicato all'attività fisica e alla cura del corpo
4. Colazione (pane e miele, niente vino durante il giorno)
5. Amministrazione della città
6. Passeggiate serali di confronto con i compagni
7. Bagno
8. Libagioni e sacrifici seguiti dal pranzo che terminava poco prima del tramonto
9. Letture in comune guidate dai più anziani
10. Saluto con parole di rito e ritorno a casa.



La Filosofia Pitagorica

Tutti concordano sul fatto che Pitagora fu uno dei primi filosofi, se non addirittura l'inventore del termine "**filosofia**".

"Per primo Pitagora usò il termine filosofia, e per primo si chiamò filosofo". [Diogene Laerzio]

"Invero Pitagora non solo fu l'inventore del nome [filosofia], ma diede sviluppo all'attività stessa". [Cicerone]

Probabilmente il suo interesse per questa disciplina nacque nel periodo in cui soggiornò in Egitto, in cui ebbe modo di confrontarsi con i sacerdoti di questa civiltà.

Poche notizie frammentarie.

Aspetti della filosofia pitagorica:

• Dottrina dell'immortalità dell'anima e della metempsirosi:

- L'anima è immortale, dopo la morte dell'individuo passa in altri esseri animati (animali o piante)

"Dicono che una volta passando presso un cagnolino che veniva picchiato... pronunciò queste parole: «cessa di batterlo perché è l'anima umana di un amico che ho riconosciuto dalla voce".

[Senofane]

- Leggende riguardo le **reincarnazioni di Pitagora** (ogni 216 anni)
- **Divieto di cibarsi di esseri viventi**
- **Divieto di cibarsi delle fave** [aneddoto campo di fave]
- **Visione ciclica del tempo** il tempo è la sfera che avvolge tutte le cose, ciò che è stato si ripete a intervalli regolari, nulla è veramente nuovo
- **Culto del numero** ←

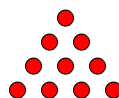
Tutto è numero

*"I Pitagorici pensano che il **numero** sia d'un modo solo, e cioè **matematico**, se non che non lo considerano separato dalle cose, ma dicono **che da numeri sono composte le sostanze percepibili**. Di numeri infatti compongono l'intero cielo; ma non di numeri formati da unità senza grandezza, che essi **attribuiscono grandezza alle unità**. Quanto alla prima unità dotata di grandezza, come essa sia composta, sembra che non sappiano dire [...] Essi dicono che il numero è le cose che sono, o almeno **applicano i loro teoremi ai corpi, come se i numeri fossero dei corpi**". [Aristotele, *Metafisica*]*

Arithmos → numero intero positivo

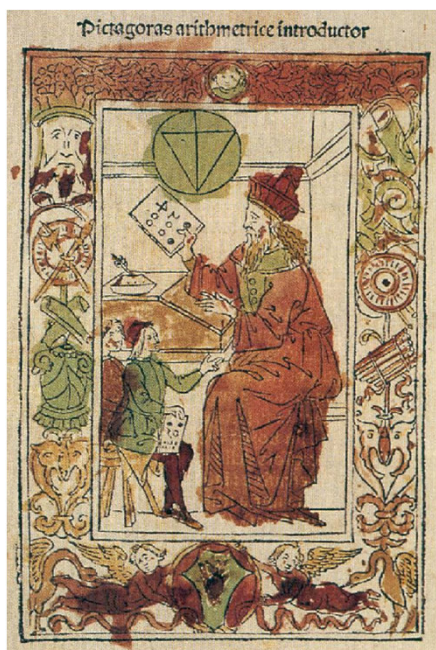
Aritmosofia pitagorica

- 1 ragione
- 2 opinione, femminile
- 3 armonia, maschile
- 2+3 sposalizio



tetractys $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

fonte e radice dell'eterna natura



I filoni di ricerca

- ◆ teoria numeri (aritmo geometria)
- ◆ problematiche connesse con la scoperta delle grandezze incommensurabili
- ◆ Armonie musicali
- ◆ teoria delle proporzioni
- ◆ prime dimostrazioni geometriche (teorema di Pitagora, solidi regolari)

NUMERI	ORDINE				
	1	2	3	4	5
TRIANGOLARI	•				
QUADRATI	•				
PENTAGONALI	•				
ESAGONALI	•				
ETTAGONALI	•				
OTTAGONALI	•				

Aritmo geometria

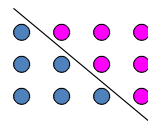
uso, finalizzato ad ottenere conoscenze di tipo aritmetico, di un algoritmo che consiste nel rappresentare i numeri naturali con configurazioni geometriche di punti (*numeri figurati o poligonal*)

Secondo **Nicomaco di Gerasa** (I-II sec.), **Introduzione all'Arithmetica**, i Pitagorici scoprirono, mediante l'aritmo geometria semplici proprietà dei numeri figurati.

1. un generico numero triangolare T_n si ottiene sommando i primi n numeri naturali:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Esempio: $T_3 = 6 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2}$



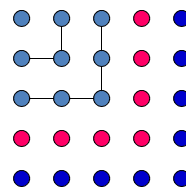
2. un generico numero quadrato si ottiene sommando i numeri dispari, a partire dall'unità: $Q_n = n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Esempio: $3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$



3. un generico numero pentagonale P_n si ottiene sommando i numeri naturali a partire dall'unità così:

$$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2)$$

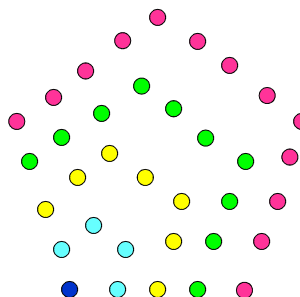
$$n = 1, 2, 3, \dots$$

La differenza tra ciascun numero e quello che lo precede è 3

Esempio:

$$P_4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

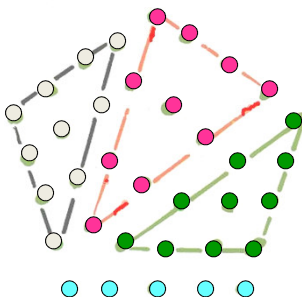
$$P_5 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$$



Come esprimere l'n-esimo numero pentagonale

Attenzione:

I Greci non avevano formule, esprimevano tutto a parole.



$$P_5 = 5 + 3T_4$$

$$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = n + 3T_{n-1} =$$

$$n + 3 \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n + 3n(n-1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Sembra che sia stato **Ipsicle** (II sec. a.C.) a stabilire un collegamento tra numeri poligonali e progressioni aritmetiche

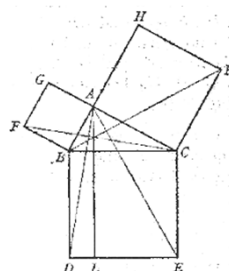
Il teorema di Pitagora

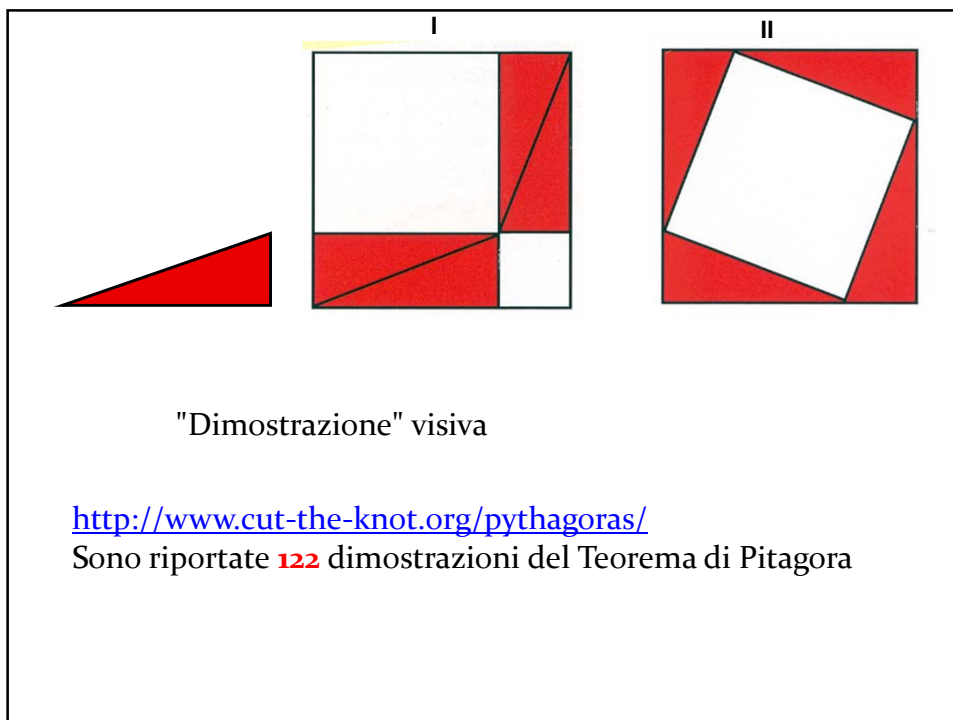
“Se consultiamo i ricercatori di cose antiche, troveremo che essi fanno risalire questo **teorema** a Pitagora, e affermano che egli sacrificò anche un bue per questa scoperta” [Proclo, *Commento al primo libro di Euclide*]

“Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all’angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l’angolo retto” [Euclide, *Elementi*, I,47]

La dimostrazione data da Euclide è troppo complessa per essere quella pitagorica originaria.

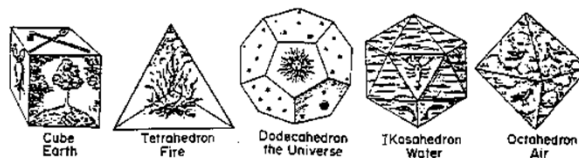
A. Schopenhauer la definì “un brillante esempio di perversione”.





I solidi regolari

«Pitagora si dedicò allo studio della geometria, e le diede forma di educazione liberale, ricercandone i principi primi e investigandone i teoremi concettualmente e teoreticamente: per primo egli trattò poi dell'**irrazionale** e trovò la **struttura delle figure cosmiche**». [Proclo]



Platone, *Timeo* :

I cinque solidi regolari sono associati agli elementi:

il tetraedro al fuoco,

il cubo alla terra,

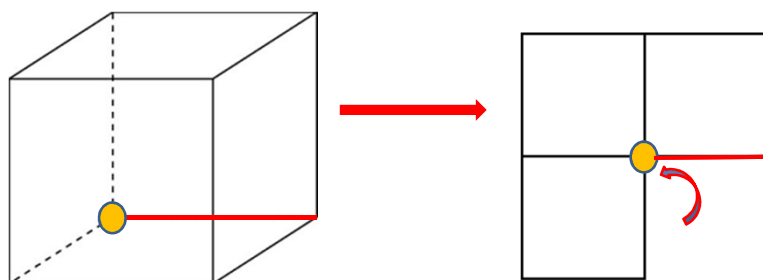
l'ottaedro all'aria

e l'icosaedro all'acqua, mentre

il dodecaedro era simbolo del cosmo.

I solidi regolari sono solamente cinque a differenza dei poligoni regolari che invece sono infiniti, poiché possono avere un numero qualsiasi di lati.

Questo avviene perché si possono costruire soltanto solidi regolari aventi **attorno ad un vertice tre facce pentagonali, tre facce quadrate oppure tre, quattro o cinque facce triangolari.**



Incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato

“Di Ippaso si racconta che fosse dei Pitagorici, ma che, per aver divulgato per primo la costruzione della sfera di dodici pentagoni, perisse in mare come empio...”

Alcuni però narrano che questo accadde a colui che aveva propalato la dottrina degli irrazionali e degli incommensurabili”

[Giamblico, *Vite dei filosofi*]

“Una dimostrazione di questo tipo (per assurdo), ad esempio, è quella che stabilisce l’incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato, che si fonda sul fatto che se si suppone che siano commensurabili, i numeri dispari risultano uguali a quelli pari” (Aristotele, *Analitici primi*)

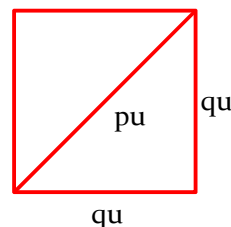
Ragionamento per assurdo

supponiamo che lato e diagonale siano commensurabili, cioè abbiano un sottomultiplo comune u

$$q^2u^2 + q^2u^2 = p^2u^2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Possiamo supporre che p e q siano primi fra loro (ipotesi non restrittiva)



p^2 è pari, dunque p è pari, allora q deve essere dispari
pongo $p = 2s$, allora

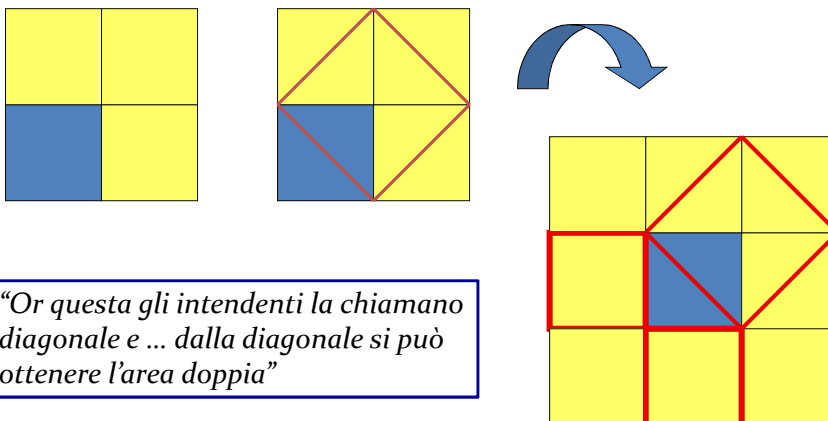
$$4s^2 = 2q^2 \quad 2s^2 = q^2 \quad q^2 \text{ pari, dunque } q \text{ è pari}$$

per cui q dovrebbe essere contemporaneamente pari e dispari, il che è assurdo.

Dunque il lato e la diagonale del quadrato sono incommensurabili

Platone, Menone

Problema: costruire un quadrato di area doppia di quello assegnato



“Or questa gli intendenti la chiamano diagonale e ... dalla diagonale si può ottenere l'area doppia”

Conseguenze della scoperta delle grandezze incommensurabili

Nella filosofia: crollo della centralità del numero [numeri interi positivi] rivelatosi insufficiente a descrivere la complessità dell'universo

Nella matematica: l'insufficienza dei numeri nelle questioni geometriche ne determina l'espulsione dalla geometria, avviando una separazione destinata a durare 2000 anni

- **nuova definizione delle grandezze geometriche**

prima: **grandezze = aggregati di monadi**, aventi quindi nella monade la comune misura naturale come è l'unità per i numeri
dopo: poiché esistono grandezze incommensurabili non aventi un sottomultiplo comune, le grandezze geometriche non possono più essere correlate ai numeri monade,

grandezza continua infinitamente divisibile

- **perfezionamento della teoria delle proporzioni** in modo da comprendere sia i rapporti razionali che i nuovi rapporti fra grandezze incommensurabili (Euclide, *Elementi*, V)

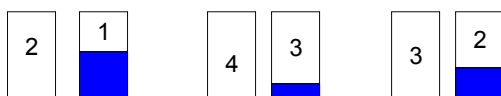
- **classificazione degli irrazionali** (Euclide, *Elementi*, X)

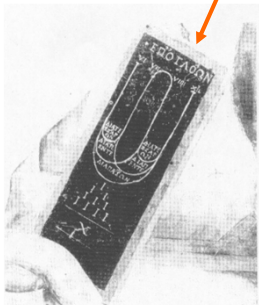


Musica

“Prendeva infatti alcuni vasi tutti uguali, e, mentre ne lasciava uno vuoto, riempiva il secondo d'acqua fino alla metà; poi li percuoteva entrambi e otteneva il rapporto di **ottava** (2 : 1).

Quindi, lasciando ancora vuoto uno dei vasi, riempiva l'altro per una quarta parte, e poi ancora li percuoteva entrambi e otteneva l'accordo di **quarta** (4 : 3); l'accordo di **quinta** (3 : 2) l'ottenneva quando riempiva il vaso per la sua terza parte” [Teone di Smirne]

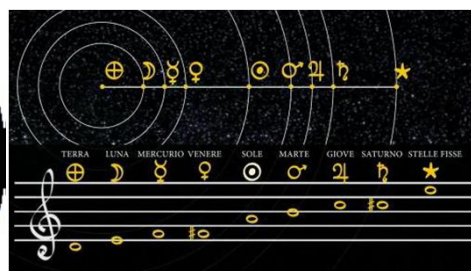
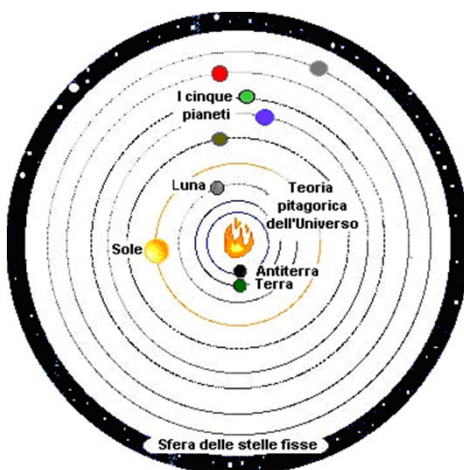




Raffaello, *La scuola di Atene*

Pitagora è riconoscibile dalla tavola che un fanciullo gli regge con la mano. Questa tavola racchiude tutta la teoria musicale di Pitagora: in alto compaiono i numeri **6, 8, 9, 12**. Una linea collega i numeri **12 e 6**, ad indicare il rapporto **2:1**, corrispondente all'**ottava (diapason)** in greco). Allo stesso modo sono collegati i numeri **9 e 6**, e **12 e 8**, ad indicare il rapporto **3:2**, corrispondente alla **quinta (diapente)** in greco), ed i numeri **8 e 6**, e **12 e 9**, ad indicare il rapporto **4:3**, corrispondente alla **quarta (diatessaron)** in greco). Nella parte bassa della tavola compare la **tetractys**.

Concezioni astronomiche



I pitagorici proposero un modello dell'universo basato su esigenze di natura numerologica.

Le caratteristiche principali:

- Universo costituito da due fuochi: uno centrale, l'altro esterno e di forma sferica (→ abbandono del geocentrismo senza approdare nell'eliocentrismo)
- 10 corpi celesti che si muovono attorno al fuoco centrale: il cielo, i 5 pianeti, il Sole, la Luna, l'Antiterra
- L'alternarsi delle quattro stagioni e del giorno e della notte dipende dalle differenti posizioni della Terra rispetto al Sole
- Via Lattea: strada percorsa dal Sole nel suo moto circolare
- Assimilazione delle comete a pianeti
- I rapporti tra le velocità degli astri e le loro distanze dal centro dell'universo coincidono con i rapporti degli accordi musicali
- Il movimento delle sfere celesti genera armonie musicali, che non siamo in grado di cogliere in quanto abituati a sentirle fin dal nascita .

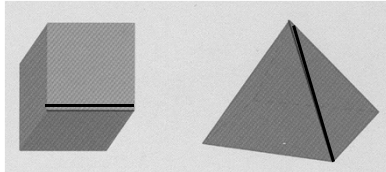
Riferimenti bibliografici

- Enrico Giusti, *"Pitagora e il suo teorema"*, Il Giardino di Archimede, Firenze, 2001
- Livia Giacardi e Clara Silvia Roero, *"La Matematica delle Civiltà Arcaiche. Egitto, Mesopotamia, Grecia ."*, Università popolare di Torino editore, Torino, 2010
- Carl B. Boyer, *"Storia della matematica"*, Oscar Mondadori, Milano, 1997

Appendice

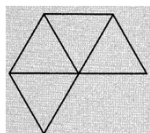
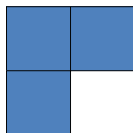
Perché sono solo 5?

Euclide lo dimostra in *Elementi*, XIII, 18



Consideriamo solo le facce che stanno attorno ad un vertice e immaginiamo di fare un taglio lungo uno spigolo

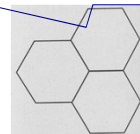
La somma degli angoli che stanno attorno al vertice è minore di 360° , e siccome attorno al vertice ci sono almeno tre poligoni, questi devono avere angoli minori di $1/3$ di 360° , cioè di 120° .



Gli angoli dell'esagono sono di 120° , e dunque tre esagoni riempiono tutto lo spazio attorno al vertice e il poliedro non si può richiudere

Ma ci sono solo tre poligoni regolari con angoli minori di 120° : il triangolo, il quadrato e il pentagono

Sono dunque possibili solo solidi regolari con facce di tre, quattro o cinque lati.

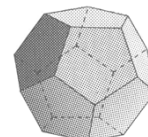


Facce quadrate o pentagonali

intorno a un vertice ci possono essere solo tre facce (quattro quadrati riempiono tutto lo spazio attorno al vertice, quattro pentagoni fanno più di 360°):

il **cubo** 6 facce quadrate

il **dodecaedro** 12 facce pentagonali

**Facce triangolari**

intorno a un vertice ci possono essere tre, quattro o cinque facce, ma non sei, che riempirebbero tutto lo spazio disponibile

il **tetraedro** 4 facce

l'**ottaedro** 8 facce

l'**icosaedro** 20 facce

